ENSEMBLES HOMOMÉTRIQUES ET CRÉATION SONORE ET VISUELLE CONTEMPORAINE

FRANCK JEDRZEJEWSKI / STÉPHANE DE GÉRANDO

RÉSUMÉ. Les *ensembles homométriques* sont des constructions mathématiques dont la propriété principale est de conserver leur structure intervallaire. Ces ensembles sont présents en cristallographie où ils ont été étudiés dès les années 1930, mais aussi en musique où ils apparaissent pour la première fois sous le nom particulier de "relation Z". Parmi ces ensembles, certains sont triviaux, d'autres, comme les multiplets qui nous intéressent ici, relèvent de singularités plus profondes, que les mathématiciens essaient actuellement de caractériser. Les difficultés de leur dénombrement sont nombreuses. Dans le cas particulier du groupe abélien formé des 24 premiers nombres, nous proposons ici une liste exhaustive de 5136 ensembles classés et nous associons l'analyse de ces ensembles à une première réalisation artistique, *Homometric attractors 2*, pour ordinateur principal, ensemble instrumental et danse, œuvre créée à Paris le 16 décembre 2014 et dont nous présentons le processus de programmation et un premier bilan critique.
MOTS CLÉS. Ensembles homométriques, création contemporaine.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction aux ensembles homométriques 1
1.1. Rappel historique 1
1.2. Formalisme mathématique général 2
1.3. Applications musicales : les hauteurs de son 3
1.4. Une singularité exemplaire : les multiplets homométriques 3
2. Remarques générales au sujet d'applications musicales 4
2.1. Le passage problématique du symbolique au perceptif 6
2.2. Applications artistiques : *Homometric attractors 1 et 2* 6
3. Pour conclure provisoirement... 12
Références 14
Annexe A. Multiplets homométriques pour $\mathbb{Z}_{18}$ 14

1. INTRODUCTION AUX ENSEMBLES HOMOMÉTRIQUES

1.1. **Rappel historique.** Le concept d'ensembles en relation Z a été introduit par Allen Forte dans son livre *The Structure of Atonal Music* publié en 1977. Dans les années 1940, les cristallographes connaissaient déjà une notion d' "ensembles de points homométriques" qui apparait dans les articles de Patterson. Les premiers théorèmes sont établis par R. K. Bullough et d'autres, jusqu'à ce que J. Rosenblatt donne à l'homométrie une assise algébrique générale. En théorie musicale, le problème a été repris par S. Soderberg en 1995, puis par J. Goyette en 2012. Mais c'est surtout J. Mandereau *et al.* qui à travers deux articles publiés dans le *Journal of Mathematics and Music* lui a donné un nouvel essor.

Franck Jedrzejewski est chercheur au Commissariat à l'Energie Atomique (CEA), mathématicien, musicologue et philosophe, Stéphane de Gérando est compositeur, professeur de composition et nouvelles technologies, docteur habilité à diriger les recherches, ancien directeur de département universitaire et directeur pédagogique de centre de formation supérieure des enseignants (CEFEDEM). Pour citer cet article : Jedrzejewski Franck, de Gérando Stéphane, *Ensembles homométriques et création sonore et visuelle contemporaine*, Paris, 3icar /icarEditions, 2014.

La notion d'homométrie est intimement liée au problème de recouvrement de phase qui apparait dans les années 1930, lorsque les cristallographes cherchèrent à déterminer la structure d'un cristal à partir d'images obtenues par diffraction X. Dans des conditions idéales, l'intensité de la transformée de Fourier de la structure du cristal est mesurée avec une information manquante, la phase de cette transformée de Fourier : pouvait-on malgré tout retrouver la structure recherchée ? Nous n'envisagerons pas ici les problèmes de reconstruction de phase dont la nature relèverait plus de l'analyse d'œuvres musicales que de la composition et de la création artistique.

Les ensembles homométriques existent dans la nature à travers certains cristaux. Leurs structures cristallines de base se répètent de manière périodique dans tout l'espace selon un modulo déterminé par le nombre d'atomes impliqués, l'élément de base (la maille du cristal) se répétant pour paver tout l'espace, ce qui n'empêche nullement les impuretés, tout comme dans la composition musicale qui trouve ici une relation naturelle.

1.2. **Formalisme mathématique général.** Les ensembles homométriques sont des ensembles de nombres dont les distances entre tous les éléments de chaque ensemble sont les mêmes. La notion de distance est considérée ici dans son acception la plus simple par la différence entre deux nombres. Un ensemble est trivialement homométrique à lui-même ou à l'un de ses translatés. L'intérêt de la notion réside dans les ensembles homométriques non triviaux et plus encore dans les multiplets homométriques comme nous allons le voir.

Dans un groupe cyclique fini $Z_N = \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$, deux ensembles A et B sont homométriques s'ils ont le même multi-ensemble des différences. Dans le groupe considéré, l'addition est l'addition modulo N. Le multi-ensemble des différences est l'ensemble obtenu en prenant toutes les différences $\Delta A = \{x - y \mod N | x, y \in A\}$ et en répétant les éléments identiques non nuls.

Prenons pour $N = 12$, les ensembles $A = \{0, 1, 3, 7\}$ et $A' = \{0, 2, 6, 11\}$. Formons toutes les différences modulo 12 et plaçons-les dans une table :

ΔA	0	1	3	7
0	0	1	3	7
1	11	0	2	6
3	9	10	0	4
7	5	6	8	0

$\Delta A'$	0	2	6	11
0	0	2	6	11
2	10	0	4	9
6	6	8	0	5
11	1	3	7	0

Par exemple $1-3 = -2 = 10 \mod 12$. En regroupant les valeurs avec leur multiplicité sauf zéro et en les réordonnant, on voit que seule la valeur 6 est dupliquée et que les multi-ensembles sont égaux.

$$\Delta A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} = \Delta A'$$

Remarquons que l'ensemble A' est le translaté de A : $A + 11 = A'$, (c'est-à-dire musicalement la transposition au demi-ton inférieur si on se place dans l'espace des hauteurs) car si on ajoute 11 à chacun des éléments de A, on obtient l'ensemble A'. Cet exemple est un cas particulier de la propriété importante suivante tout ensemble est homométrique à ses translatés. La translation T_k qui est définie par $T_k(x) = x + k \mod N$ conserve les distances des tables précédentes. De la même façon, l'inversion $I(x) = -x \mod N$ conserve elle aussi les distances des tables précédentes de sorte que tout ensemble est homométrique à son propre inverse. Musicalement, l'inversion correspond au renversement de chaque intervalle. Dans tous ces cas (translations et/ou inversions), nous dirons que l'homométrie est triviale. Si maintenant nous considérons toujours pour $N = 12$ les ensembles $A = \{0, 1, 3, 7\}$ et $B = \{0, 1, 4, 6\}$, nous obtenons deux nouvelles tables :

ΔA	0	1	3	7
0	0	1	3	7
1	11	0	2	6
3	9	10	0	4
7	5	6	8	0

$\Delta A'$	0	1	4	6
0	0	1	4	6
1	11	0	3	5
4	8	9	0	2
6	6	7	10	0

qui conduisent toutes deux au même ensemble de différences

$$\Delta A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} = \Delta B$$

Mais cette fois, A et B sont deux ensembles structurellement différents. On dira que A et B sont deux ensembles homométriques non-triviaux.

1.3. **Applications musicales : les hauteurs de son.** Dans le domaine musical de la *Set theory*, en dénombrant tous les ensembles de 0 à 11 sons modulo l'action du groupe diédral, Allen Forte a constaté que certains accords étaient formés des mêmes types d'intervalles modulo 12, ce qu'il appelle des ensembles en relation Z.

Il a dénombré tous les couples d'ensembles en relation Z et indiqué dans le chiffrage de l'ensemble cette propriété. L'ensemble $A = \{0, 1, 3, 7\}$ est chiffré $4Z29$ et l'ensemble $B = \{0, 1, 4, 6\}$ est noté $4Z15$. Ces deux ensembles sont comme nous venons de le voir homométriques.

Ces deux accords de 4 sons $A = \{0, 1, 3, 7\}$ et $B = \{0, 1, 4, 6\}$ c'est-à-dire A = (*do,do*♯, *mi*♭, *sol*) et B = (*do, do*♯, *mi, fa*♯) sont formés des mêmes intervalles à inversion près :

(1) un demi ton (*do, do*♯) pour les deux accords
(2) un ton (*do*♯, *mi*♭) pour A et (*mi, fa*♯) pour B
(3) une tierce mineure (*do, mi*♭) pour A et (*do*♯, *mi*) pour B
(4) une tierce majeure : (*mi*♭, *sol*) pour A et (*do, mi*) pour B
(5) une quarte (ou une quinte) : (*do, sol*) pour A et (*do*♯, *fa*♯) pour B
(6) un triton : (*do*♯, *sol*) pour A et (*do, fa*♯) pour B

et nous avons compté tous les intervalles possibles. Si on transpose ou inverse un des deux accords, les intervalles constitutifs restent les mêmes. Allen Forte appelle cela la relation Z et la généralisation de cette relation à des ensembles de plus de douze sons s'appelle les ensembles homométriques, par analogie aux problèmes de cristallographie. "Ensemble homométrique" est une expression plus neutre et plus générale, indépendante de la *Set theory* (contrairement à "ensembles en relation Z").

En général, ces ensembles vont par paires. Dans le tempérament égal à douze sons, il n'y a qu'un seul ensemble homométrique de 4 notes (celui que nous venons de voir), trois ensembles de 5 notes :

(1) $\{0, 1, 3, 5, 6\}$ et $\{0, 1, 2, 4, 7\}$
(2) $\{0, 1, 3, 4, 8\}$ et $\{0, 3, 4, 5, 8\}$
(3) $\{0, 1, 4, 5, 7\}$ et $\{0, 1, 2, 5, 8\}$

et 15 ensembles de 6 notes.

Si maintenant on cherche à déterminer tous les ensembles homométriques dans un tempérament égal à N sons, on trouvera une liste du même type que celle de Forte.

Par exemple, pour 13 notes à l'octave :

(1) Une classe de deux ensembles de 4 notes : $\{0, 1, 3, 9\}$ et $\{0, 1, 4, 6\}$
(2) Deux classes de deux ensembles chacune de 6 notes : Première classe : $\{0, 1, 2, 3, 6, 10\}$, $\{0, 1, 2, 4, 5, 8\}$, et deuxième classe : $\{0, 1, 2, 4, 7, 9\}$, $\{0, 1, 3, 5, 7, 8\}$

Et il n'y en a pas d'autres.

On pourrait continuer ainsi à déterminer toutes les paires pour chaque groupe cyclique, mais il existe des structures plus riches encore. À partir de 16 éléments dans le groupe, il apparaît des multiplets homométriques que nous allons voir maintenant.

1.4. **Une singularité exemplaire : les multiplets homométriques.** Pour un ensemble à 16 éléments, il existe trois triplets d'ensembles de 6 éléments chacun. Dans un triplet, chaque ensemble a le même vecteur des différences.

Par exemple, les ensembles $A = \{0, 1, 2, 4, 6, 9\}, B = \{0, 1, 2, 4, 9, 14\}$ et $C = \{0, 1, 3, 5, 7, 8\}$ ont la même structure. Pour le démonter, il faut calculer les tables des différences et constater que les trois tables ont le même vecteur des différences et que $\Delta A = \Delta B = \Delta C$. Dans cet univers du groupe cyclique à 16 éléments, il existe deux autres triplets qui sont :

(1) $\{0, 1, 2, 5, 8, 10\}$, $\{0, 1, 3, 4, 9, 11\}$, $\{0, 1, 3, 9, 11, 12\}$
(2) $\{0, 1, 2, 6, 9, 12\}$, $\{0, 1, 3, 7, 8, 13\}$, $\{0, 1, 4, 6, 9, 10\}$

L'idée est donc de déterminer toutes ces singularités, tous ces multiplets (qui ne sont pas trivialement des paires) dans les groupes cycliques et de les utiliser comme matériau de composition. Nous appellerons *multiplets homométriques* les classes homométriques constitués d'au moins 3 ensembles.

Si on regarde des univers connus, par exemple

1) Pour $N = 18$, ce qui au plan des hauteurs correspond aux tiers de ton ($0 = do$, $1 = do + 1/3$, $2 = do + 2/3$, etc.), on constate qu'il existe :

(1) un triplet d'ensembles de 5 éléments : $\{0, 1, 3, 6, 10\}$, $\{0, 1, 3, 10, 15\}$, $\{0, 1, 4, 7, 9\}$
(2) six triplets d'ensembles de 6 éléments,
(3) 16 triplets d'ensembles de 7 éléments,
(4) 11 triplets d'ensembles de 8 éléments,
(5) 6 triplets d'ensembles de 9 éléments,
(6) 54 quadruplets d'ensembles de 9 éléments

2) Pour $N = 24$, ce qui au plan des hauteurs correspond aux quarts de ton, ($0 = do$, $1 = do + 1/4$, $2 = do\sharp$, $3 = do + 3/4$, etc.), il existe :

(1) 1 triplet de 5 éléments
(2) 5 quadruplets de 6 éléments
(3) 9 triplets de 7 éléments
(4) 15 quadruplets de 7 éléments
(5) 1 septuplet de 7 éléments
(6) 87 triplets de 8 éléments
(7) 53 quadruplets de 8 éléments
(8) 3 sextuplets de 8 éléments
(9) 304 triplets de 9 éléments
(10) 233 quadruplets de 9 éléments
(11) 3 quintuplets de 10 éléments
(12) 11 sextuplets de 10 éléments
(13) 3 octuplets de 10 éléments

Les ensembles homométriques font l'objet d'une recherche active. Actuellement, nous ne sommes pas capables de dire quels sont les ensembles homométriques pour $N = 96$ (ce qui pour les hauteurs correspond aux 1/16e de ton), ni simplement de savoir combien il y en a, les temps de calcul sur ordinateur étant très long.

C'est pourquoi la communauté de chercheurs s'est engagée dans une recherche algorithmique.

2. Remarques générales au sujet d'applications musicales

Pour résumé, la conservation de la distance appliquée à la notion d'intervalle est fondamentale, associée à des transpositions et inversions possibles. L'homométrie n'est valable que relativement à N, la notion modulo étant tout aussi importante.

Soulignons que "modulo" traduit in fine une sensation de doublement de toute sensation auditive ou d'octave – un son deux fois plus haut, plus fort, plus loin... – avec une sensation de proximité, de consonance, d'identité (pour le cas des hauteurs, même appellation de note à l'octave mais avec des indications différentes de tessitures *do*$_1$, *do*$_2$,...).

Si ce sont des hauteurs, par exemple pour les tiers de ton N vaut 18, les hauteurs sont symbolisées par tous les chiffres de 0, 1, ..., 17. Si ce sont des événements temporels, on peut considérer que ces événements interviennent sur une base totale de 18 unités de temps, sinon on perd l'homométrie, mais libre au compositeur de définir l'unité de temps.

Comme nous l'avons évoqué, ces notions de translation et d'inversion ne sont pas prioritaires pour traduire la particularité des ensembles homométriques et multiplets non triviaux, ces "techniques d'écriture" pouvant cependant aider le compositeur à développer le matériau comme nous le verrons par la suite.

Imaginons deux exemples d'invention du temps en application à l'homométrie :

(1) la première consisterait au départ à appliquer cette notion modulo comme si le temps s'enroulait autour du cercle modulo N, en autant de tours souhaités,

(2) la seconde conception répondrait à une simple translation sur la droite et non sur le cercle, l'ensemble des structures intervallaires étant aussi conservées.

Prenons un exemple de translation et d'inversion du temps, tout ensemble étant homométrique à ses translatés et son propre inverse.

(1) *"Temps modulo N" ou simple translation*

Voici une autre manière de traduire la question en rapport ici avec œuvre micro-intervallique en quarts de ton ($N = 24$).

Première proposition - temps modulo N (modélisation modulo 24) : un ensemble translaté deviendrait par exemple {13, 14, 17, 21, 26} qui, ramené dans le cercle modulo 24, correspond à {13, 14, 17, 21, 2} (car $2 = 26 - 24$), équivalent, si 1 = 125 ms par exemple, à 1625 ms, 1750 ms, 2125 ms, 2625 ms, 250 ms. Remis dans l'ordre croissant, ces grandeurs symbolisent des dates, 250 ms, 1625 ms, 1750 ms, 2125 ms, 2625 ms associées aux durées 250, 1375, 125, 375 500.

Seconde proposition - modélisation sur une droite : on peut ici conserver $26 \times 125 = 3250$ ms, sans remettre les valeurs en ordre croissant, les structures intervallaires étant aussi conservées (simple translation sur la droite et non sur le cercle).

Il faudrait naturellement aussi utiliser les autres ensembles du triplet {0, 1, 4, 13, 20}, {0, 1, 5, 9, 12} pour que joue l'homométrie.

(2) *Le temps inversé*

1- La définition mathématique de l'inversion (dans une dimension équivaut à une symétrie centrale) : règle algébrique, $x \to -x$.

2- Le résultat (modulo 24, en quarts de ton) sur l'objet mathématique {0,1, 4, 8, 13} est {0, 11, 16, 20, 23}

Ensemble initial $\{0, 1, 4, 8, 13\} - x$ donne {-0,-1,-4,-8,-13} modulo 24 {0, 23, 20, 16, 11} résultat {0, 11,16, 20, 23}

3- L'ordre des éléments de cet ensemble n'a ici pas d'importance, (attention à la notation initiale des ensembles, avec guillemet ou parenthèse) il ne faut donc pas confondre l'inversion au sens géométrique (et mathématique) ou le sens courant d'inversion ou de rétrograde (musique à l'envers, de la fin jusqu'au début) qui n'a aucun rapport dans ce cas (hauteurs et durées). Il s'agit ici davantage d'une notion " miroir ", miroir pour les hauteurs (couramment utilisé) mais aussi "miroir temporel " et non rétrograde.

4 - Par contre, si l'on applique l'inversion à des événements ou dates (non pas à des durées par exemple) en seconde par exemple (0s 1s 4s...), il y a ici une confusion inévitable entre la notion d'inversion (symétrie centrale à 1 dimension) et de rétrogradation (musique à l'envers).

2.1. **Le passage problématique du symbolique au perceptif.** Si l'on souhaite utiliser rigoureusement les ensembles homométriques pour la composition, la question dépasse le cadre d'une stricte application des résultats mathématiques aux paramètres physiques sonores et visuels.

En effet, passer d'une mesure purement mathématique à la perception de cette mesure, de plus dans un cadre spécifiquement artistique, est un problème particulièrement complexe, les sciences cognitives ne semblant pas être en mesure d'apporter actuellement des réponses immédiates aux nombreuses et passionnantes questions posées à ce sujet.

Il serait par exemple nécessaire d'utiliser des échelles sonores et visuelles avec des intervalles perçus comme étant équidistants (durée, timbre, nuance, espace, teinte, saturation...) et ce quelle que soit la complexité des situations ou des matériaux sonores utilisés...

A plus long terme, nous proposons une approche qui ferait intervenir précisément deux niveaux contrôles :

1. une "interface de contrôle symbolique"(recherche mathématique et combinatoire liée aux ensembles homométriques),

2. et "une interface de contrôle perceptif"(recherche cognitive, traduction perceptive des données mathématiques).

Pour simplifier cette première approche, nous tiendrons essentiellement compte de la première interface de contrôle, interprétant ces ensembles homométriques plus comme des attracteurs singuliers, admettant des fluctuations autours de relations internes spécifiques.

On parle d'ailleurs en géologie de dimensions proches, notamment pour les roches sédimentaires formées d'éléments de tailles voisines.

2.2. **Applications artistiques : *Homometric attractors 1 et 2*.** A travers une succession de phases expérimentales, le but est de complexifier progressivement l'application des ensembles homométriques aux paramètres sonores voire visuels, avec l'objectif d'aboutir à l'écriture d'œuvres, qu'elles soient de natures purement algorithmiques (*Homometric attractors 1*), instrumentales, poly-artistiques (*Homometric attractors 2*) ou multimédia (image et son) (*Homometric attractors 3*).

Pour ce faire, nous présentons différentes étapes qui vont menées à la composition d'*Homometric attractors 2* de Stéphane de Gérando, en tentant de dresser un premier bilan concernant l'utilisation de ces ensembles. Le développement du programme est réalisé dans l'environnement MAX-MSP-JITTER.

2.2.1. *Architecture initiale du programme.* Nous avons vu que la notion de modulo était fondamentale pour décrire des ensembles homométriques caractéristiques d'espaces périodiques (selon le modulo choisi).

Le choix modulo N, valeur commune du découpage des différentes échelles sonores ou visuelles

Nous choisissons au départ l'approche la plus simple pour tenter de conserver la cohérence des ensembles homométriques à partir d'un nombre commun de valeurs,

1	1	5	3	1	$\{0, 1, 4, 8, 13\}$
2					$\{0, 1, 4, 13, 20\}$
3					$\{0, 1, 5, 9, 12\}$
4	2	6	4	4	$\{0, 1, 2, 5, 14, 18\}$
5					$\{0, 1, 2, 6, 10, 13\}$
6					$\{0, 1, 3, 7, 11, 12\}$
7					$\{0, 1, 4, 5, 11, 13\}$
8	3	6	4	8	$\{0, 1, 3, 6, 9, 13\}$
9					$\{0, 1, 3, 6, 13, 21\}$
10					$\{0, 1, 3, 13, 18, 21\}$
11					$\{0, 1, 4, 7, 10, 12\}$
12	4	6	4	12	$\{0, 1, 3, 7, 12, 15\}$
13					$\{0, 1, 3, 12, 15, 19\}$
14					$\{0, 1, 4, 6, 13, 16\}$
15					$\{0, 1, 4, 13, 16, 18\}$
16	5	6	4	16	$\{0, 1, 3, 7, 15, 20\}$
17					$\{0, 1, 4, 6, 13, 20\}$
18					$\{0, 1, 4, 13, 18, 20\}$
19					$\{0, 1, 5, 7, 17, 20\}$
20	6	6	4	20	$\{0, 1, 3, 9, 13, 18\}$
21					$\{0, 1, 4, 10, 12, 19\}$
22					$\{0, 1, 6, 9, 13, 15\}$
23					$\{0, 1, 7, 10, 12, 16\}$
24	7	7	3	23	$\{0, 1, 2, 4, 6, 9, 17\}$

TABLE 1. Structure de la table des ensembles homométriques - extrait

ici modulo 24, attribuées aux différentes échelles du matériau sonore et visuel : 24 hauteurs (échelle en quarts de ton), 24 durées, 24 positions spatiales du son (panoramique), 24 harmoniques pour le timbre, 24 découpages spectrales de la lumière...

2.2.2. *Numérotation et analyse des ensembles homométriques.* Une des premières étapes de la composition consiste à numéroter et classer la totalité des ensembles homométriques modulo 24 existant, l'objectif étant de pouvoir à partir d'un simple fichier texte "les appeler"automatiquement dans MAX-MSP-JITTER selon un formalisme qui tienne compte de cette classification.

Pour N=24, nous avons 5136 ensembles regroupés en 1436 classes homométriques. Dans un tableur, nous réalisons plusieurs types d'analyse de ce matériau, regroupement et numérotation des n-uplets, pour finalement revenir à une simple numérotation des ensembles caractérisés par les cinq colonnes suivantes (extrait du début du tableur) :

(a) une numérotation de la totalité des ensembles,
(b) une numérotation des classes homométriques,
(c) le nombre d'éléments dans chaque ensemble,
(d) le nombre d'ensembles dans chaque classe homométrique,
(e) une numérotation correspondante à la place des ensembles homométriques en rapport avec la totalité des ensembles.

2.2.3. *Algorithme général de sélection des ensembles homométriques.* Résumé de la procédure de sélection des éléments des ensembles :

(1) À partir de la liste des 1436 ensembles, le programme sélectionne aléatoirement :
— un numéro d'ensemble homométrique,
— puis un ensemble appartenant à cet n-uplet homométrique.

(2) À partir de cet ensemble sélectionné, le programme effectue une succession de nouveaux tirages aléatoires égale au nombre d'éléments de l'ensemble, alternant un tirage aléatoire sans répétition de nombres pairs et impairs ou inversement (selon le nombre initial de valeurs paires ou impaires de l'ensemble). Si le nombre de valeurs paires ou impaires de l'ensemble est déséquilibré, le programme favorise à la fin du processus de sélection un tirage aléatoire répété d'éléments de l'ensemble pour respecter la règle de l'alternance pair /impair ou inversement (dans ce cas, tous les éléments de l'ensemble ne sont pas tirés).

Voici un exemple de résultat de l'algorithme, avec le numéro d'ensemble, l'ensemble et les valeurs tirées :

Ensemble 3244 / {0, 1, 3, 5, 9, 12, 13, 17, 19, 22} / 13 0 17 12 5 22 3 12 1 22
Ensemble 3245 /{0, 1, 3, 6, 8, 10, 13, 14, 18, 22} / 0 1 14 13 10 3 18 3 8 13
Ensemble 3243 /{0, 1, 3, 5, 8, 11, 13, 15, 20, 21} / 3 0 1 20 11 8 15 8 13 0
Ensemble 5024 /{0, 1, 3, 5, 7, 10, 13, 16, 17, 22} / 5 16 7 10 17 0 1 22 13 16
....

(3) Puis l'algorithme réitère ce processus de sélection et ce sans répétition jusqu'au tirage des 5136 ensembles : il y a naturellement la possibilité de définir une durée d'exécution, tout comme déclencher le processus à l'infini....

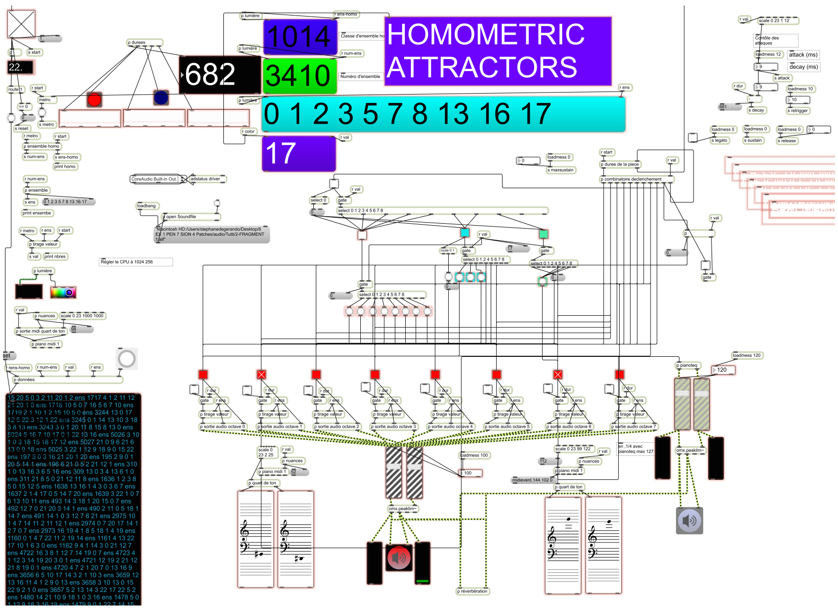

FIGURE 1. Premier niveau de représentation de l'algorithme, dans MAX-MSP-JITTER.

2.2.4. *Première application aux autres paramètres.* Dans un premier temps, chaque valeur automatiquement choisie est appliquée en temps réel aux hauteurs, durées, intensités, spectres, spatialisation et couleur.

(1) *Hauteurs*

Initialement pour les hauteurs, les nombres tirés des ensembles homométriques de 0 à 23 sont appliqués à des hauteurs dans l'intervalle d'un octave, entre un do4 et do5 (notation américaine de l'octave), soit en notes midi réparties sur deux canaux accordés à un quart de ton de différence pour contrôler un son de piano en micro-intervalle (entre 60 et 71.5), soit interprété directement en hertz pour piloter un synthétiseur additif réalisé dans MSP (entre 261.6 Hz et 508.3 Hz).

(2) *Nuances*

Pour le contrôle des nuances et des sons via la norme midi (contrôle de tout type de synthétiseur ou d'échantillonneur), nous appliquons les valeurs chaque fois tirées à un découpage de 23 valeurs d'intensité suivant une échelle midi (de 0 à 127) : (14 20 26 32 38 44 50 56 68 62 68 74 80 86 92 80 86 92 98 104 110 116 122 127). La nuance est ici proportionnelle à la durée (plus la durée est longue, plus la nuance est forte).

Dans le cadre du contrôle des nuances du synthétiseur additive, le programme effectue une mise à l'échelle automatique des données, passant d'un ambitus de 0 à 23 à un ambitus de 1 à 0.1 ("rescaling inversé"). Puis le programme multiplie l'intensité de la sortie du synthétiseur entre 0.1 et 1, sorte de contrôle homométrique des potentiomètres. Pour varier l'écoute du timbre - le son du piano peut être mixé au son de synthèse, la nuance est ici inversement proportionnelle à la durée (plus la durée est longue, plus la nuance est faible).

(3) *Durées*

Les valeurs de 0 à 23 sont initialement mises à l'échelle sur une "octave de durée" dont on choisi initialement l'ambitus, comme par exemple de 150 ms à 300ms.

(4) *Timbre et synthèse du son*

Un synthétiseur additif est réalisé avec la possibilité de contrôler 24 harmoniques. Chaque valeur des ensembles homométriques déclenche un rang harmonique correspondant (exemple (0,1,3,7) = fondamentale, harmonique 1, harmonique 3 et harmonique 7). Pour l'occasion, seul la densité (nombre d'harmoniques) et la composante spectrale sont définies par les ensembles homométriques. Précisons que la structure homométrique résultante est relative aux rangs des harmoniques et non à la distance entre chaque chaque harmonique (multiplication et non addition), suivant le modèle mathématique de base d'un son dit harmonique (avec hauteur) et de son analyse (Fourier).

(5) *Spatialisation*

La spatialisation du son ou simple contrôle du panoramique (rapport d'intensité de l'enceinte gauche et droite) suit une mise à l'échelle automatique des données entre 0 et 1. Le son le plus grave (*do*) est totalement à gauche (0), le son le plus aigu (*si*) totalement à droite (1), le *fa dièse* étant diffusé au centre (HP1 : intensité du son multipliée par la racine carrée de la valeur du panoramique entre 0 et 1, I * sqrt(pan) /HP2, I * sqrt(pan * -1 + 1).

(6) *Lumière et déplacement homométrique*

Pour contrôler un synthétiseur additif (RGB), la lumière suit une mise à l'échelle automatique des données sur le spectre visible, entre 0 et 256. Puis nous créons une matrice de 24 pixels, colonne horizontale et 1 pixel, colonne verticale. Le déplacement du pixel coloré suit le déplacement du panoramique selon la même logique homométrique.

2.2.5. *Premiers constats et évolution du programme.* La perception des ensembles homométriques ne semble pas immédiate : il serait par exemple particulièrement difficile d'identifier précisément les changements d'ensembles.

D'une autre manière, nous constatons que le matériau engendré contient une forte cohérence, elle-même amplifiée par un "traitement symétrique" (par exemple proportionnel...) de valeurs communes et l'utilisation de mêmes logiques de contrôle.

Par ailleurs, en l'état, l'écoute du matériau est très vite lassant : pauvreté d'un timbre limité à 24 harmoniques notamment, systématisme des procédés trop simplistes, redondances des notes graves liées à la structure même des ensembles. . . .

Pour une utilisation musicale de ces ensembles, il semble bien nécessaire de complexifier les processus d'écriture :

(1) en variant les processus d'application de ces ensembles tout en gardant leurs identités (transformations euclidiennes conservant des notions de distances par exemple. . .),
(2) en introduisant des nouveaux concepts issus de ces ensembles : densités, polyphonies, polymorphismes homométriques...,
(3) et plus généralement, en complexifiant la logique d'écriture, jusqu'à sortir du champ de ces espaces spécifiques.

Se cantonner à une stricte application de ces ensembles semblerait à ce premier stade de notre expérimentation particulièrement naïf. Cette situation rappelle s'il est nécessaire qu'il n'est pas ici question de confondre une problématique artistique avec une problématique purement scientifique, mathématiques, informatique, expérimentale ou même perceptive. Chaque discipline a ses singularités qu'il ne s'agit pas de confondre, même si ces domaines communiquent et s'enrichissent comme nous tentons de le faire.

Prenons l'exemple de l'évolution de la spatialisation du son ou des différentes hauteurs réparties selon les octaves : nous sortons d'un traitement trop schématique entre hauteur et localisation du son, en combinant un traitement proportionnel ou inversement proportionnel des ensembles homométriques.

2.2.6. *Matériau homométrique ou combinatoire issue des ensembles homométriques.* En conséquence, à ce stade du développement musical, il nous semble nécessaire de distinguer deux concepts à la fois différents et complémentaires : d'une part, la tentative d'invention d'un matériau sonore et visuel homométrique engendré par une application des logiques homométriques et d'autre part, l'invention de combinatoires issues de ces ensembles homométriques, matériau possiblement éthérométrique proliférant de manière diversifiée à partir des mêmes données initiales.

2.2.7. *Notion de mémoire du matériau.* De la même manière pour complexifier notre système d'écriture, les données générées en temps réel sont sur l'instant mémorisées dans un fichier texte, pour être réutilisées comme une mémoire réinjectée du matériau, soit par la suite, soit superposées dans un temps différent, afin d'entrainer des notions canoniques ou polymorphiques, à l'image de différents ensembles homométriques superposés qui structureraient un passage. On pourrait utiliser le concept de polymorphisme canonique homométrique, qui indiquerait l'utilisation décalée de structures symboliques spécifiques pour le contrôle des paramètres sonores et visuels, aspect qui dépasse le stricte cadre historique des techniques contrapunctiques ou des musiques poly.... (polyphoniques, polymodales...).

2.2.8. *De la monodie à la polyphonie, ou la notion de densité combinatoire homométrique.* Pour varier davantage à la fois l'écriture du timbre et de l'harmonie, nous passons d'une écriture monophonique à une combinatoire polyphonique en appliquant le même système de sélection des paramètres sonores et visuels, mais cette fois multiplié et répartie sur 7 octaves, avec un contrôle des densités harmoniques tiré de ce processus de mémoire réinjectée (ensembles homométriques utilisées).

C'est un peu comme si nous avions maintenant 7 instrumentistes ayant des registres chaque fois différents, instrumentistes activés par une combinatoire émanant elle-même des classes homométriques.

Pour éviter que trop de variations successives du matériau et des hauteurs de son entrainent une sensation de monotonie et une absence de variation, nous créons "trois états combinatoires"distincts selon les registres : l'un grave, l'autre aigu, le dernier réunissant

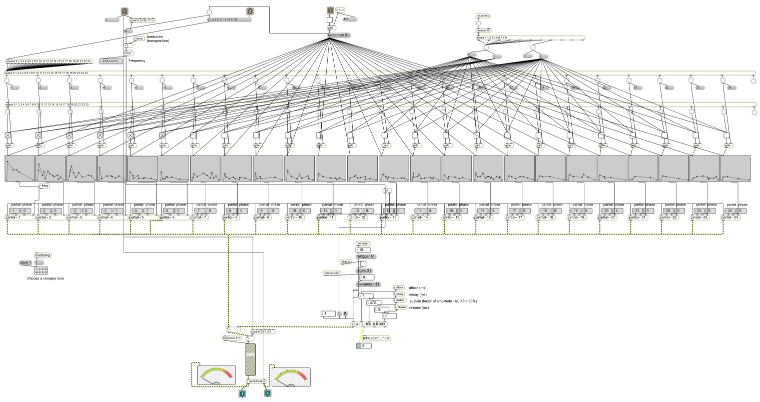

FIGURE 2. Un des sept synthétiseurs additifs dont les harmoniques sont déclenchées par une combinatoire issue des ensembles homométriques.

la totalité de l'ambitus (la possibilité de faire jouer ensemble les 7 instrumentistes), le tout étant déclenché par les valeurs des ensembles homométriques, comme si on appliquait des filtres à ces ensembles pour ensuite les répartir plus ou moins sur le déclenchement des ces différents états, d'ou cette notion de densité combinatoire homométrique.

Plus encore, à cette logique entraînant toujours trop de variation sonore sur la durée et donc une absence de renouvellement musical, nous créons 6 nouveaux modèles de contrôle des registres eux-même répartis en deux sous-modèles.

L'invention du timbre se trouve enrichie par la gestion de ces densités harmoniques à différentes échelles du temps, processus de nouveau diversifié par le déclenchement d'un son de piano, ici uniquement utilisé lors des apparitions de registres graves et aigus (octaves 1 et 6). Six modèles de nuance adaptés à un mixage équilibré des registres favorisent l'apparition de courtes interventions *forte*, le tout entrecoupé de silences issus des combinatoires homométriques.

2.2.9. *Translations homométriques des hauteurs.* De la même manière, malgré la non répétition entrainée par le système de sélection des valeurs des ensembles homométriques, nous percevons de nouveau une monotonie qui semble être liée à la réitération privilégiée des plus petites valeurs des ensembles. Dans le cadre des hauteurs, nous créons un système de translation (transposition) des ensembles selon les ensembles déjà tirés.

2.2.10. *L'invention du temps.* D'une autre manière, réduire les durées de 0 à 23 valeurs dans un même référentiel de temps, de plus s'il est contenu dans une notion d'octave (doublement d'une valeur) est artistiquement trop limité en l'état. Dans ce premier exemple de programmation, en choisissant de nous limiter à une réalisation homorythmique et pour gagner en souplesse et diversité, nous créons trois modèles générales de durées tirés des ensembles homométriques : l'un entrainant une distorsion de ces valeurs, l'autres étant répétitif et le troisième représentant une stricte application des ensembles homométriques. Par exemple dans le cadre du premier modèle, le programme effectue une mise à l'échelle automatique des durées de 0 à 23 appliquées à des ambitus minimum et maximum eux-mêmes définis par le numéro de classe homométrique (5 de 50 ms à 1027 ms) et l'ensemble lui-même (4 de 100 ms à 359 ms).

2.2.11. *De la grande forme à la notion d'attracteur.* Dans les prolongements des problématiques exposées dans *Dialogues imaginaire* (Stéphane de Gérando, Paris, Inactuelles, 2011), l'objectif est ici de créer une œuvre qui développe "son propre imaginaire", un imaginaire à la fois toujours différent et marqué par une forte identité styliste. Grâce à la diversité des classes homométriques (modulo 24) et la combinaison de processus probabilistes et déterministes, l'œuvre n'est en effet jamais la même alors que l'on pourrait chaque fois la reconnaître. Un deuxième objectif est lié au développement du temps et de la grande forme qui doit entretenir une imprévisibilité et une non causalité : Il n'y a ici ni début ni fin véritable, ni même de flèche du temps ou de but à attendre (climax...), mais il s'agit d'avantage d'exprimer un "état"à la fois unique et multiple, synchronique et diachronique. La notion d'attracteur se concrétise alors à travers une double application des ensembles homométriques : l'une qui tente le plus possible de conserver la singularité de ces ensembles (notion de distances....) et l'autre qui utilise ces mêmes ensembles pour développer des combinatoires du matériau, voire créer des espaces parallèles qui pourraient d'une certaine manière être interprétés comme étant éthérométriques.

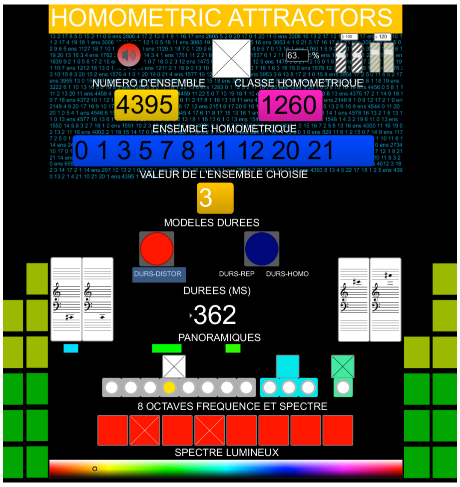

FIGURE 3. L'interface de contrôle de l'algorithme.

2.2.12. *Hommometric attractors 2.* La première réalisation publique liée à ces ensembles homométriques est *Homometric attractors 2*, pour ordinateur principal, ensemble instrumental et danse, œuvre créée le 16 decembre 2014 à Paris. Commande du conservatoire du 19ème arrondissement de Paris en décembre 2014, la partie instrumentale (cordes, flûte, clarinette basse, saxophone baryton) a été écrite en trois jours grâce à l'algorithme via une transcription des données du programme en fichier midi. L'œuvre se décompose en trois parties : la première uniquement instrumentale, la seconde pour l'algorithme et deux danseuses, et la troisième réunissant l'ensemble en créant une polyphonie (musique instrumentale et musique électronique), à l'image d'une polymodalité imprévisible superposant deux classes d'ensembles homométriques. Par ailleurs, cette œuvre faisant aussi partie du grand cycle du *Labyrinthe du temps*, les règles d'improvisation du mouvement dansé s'inspiraient de ce même *Labyrinthe*, selon une classification de processus statiques ou dynamiques.

3. POUR CONCLURE PROVISOIREMENT...

Dans le prolongement des traditions de l'écriture liées à la musique savante occidentale, les ensembles homométriques appliqués à des univers micro-intervalliques ouvrent la voix vers de nouvelles problématiques. Ils posent la question du lien entre écriture, perception et imaginaire, du rapport à la mémoire et des notions de proliférations, comme pour mieux à la fois cimenter et diversifier le matériau sensoriel. Plus encore, l'objectif artistique n'est

FIGURE 4. Le début de la partition d'*Homometric attractors 2*, résultat de l'algorithme.

pas de créer des mondes sensoriels homométriques et d'une certaine manière trop "symétriques" : la question est bien d'envisager des nouvelles formes de contrôle du matériau pour mieux l'appréhender, l'inventer, le diversifier voire le désarticuler.

Lors de cette première expérience artistique, nous avons vu se dessiner des concepts artistiques singuliers : les notions d'attracteurs homométriques de timbre, de hauteur, de durée, de nuance, d'espace, de silence, les translations homométriques, densités homométriques, complexes polysensoriels homométriques...

Naturellement suite à cette première étape de la recherche, de nombreuses questions restent à approfondir ; comme la perception de ces ensembles qui pourrait avec le temps évoluer, l'analyse des classes d'ensemble en lien avec la composition, les moyens de favoriser une combinatoire qui conserve des notions de distance tout en développant une souplesse du matériau, avec par exemple l'utilisation de modèles de transformation euclidiens jusqu'à des formes de nouvelles géométries. Que deviendrait une polyrythmie ou des espace temps homométriques, la complexification d'hybrides polysensoriels homométriques voire poly-artistiques, de la composition du mouvement dansé à la création poétique ?...

Une des prochaines étapes du développement de l'algorithme permettra de définir des cartographies de points dans un espace à trois dimensions selon les ensembles homométriques, afin de définir des formes virtuelles qui pourront directement être appliquées aussi bien au mouvement dansé qu'à la création d'images virtuelles via des "nurbs" ou "mesh" dans l'environnement Jitter. Il serait aussi intéressant d'enrichir cette notion d'attracteur, en créant à partir de surfaces de nombres et par le biais de vecteurs tangents des transformations isométriques ou circulations singulières à l'intérieur des classes d'ensemble permettant d'être sur "des points d'ensembles homométriques"pour s'en écarter à l'aide de contraction dillatation et selon une scénographie de l'espace /temps (objets 3D et trajectoires imaginaires).

À travers ces différents concepts et notre première expérience compositionnelle, nous avons conscience de définir à notre manière la pratique d'un art homométrique, art qui se fonde sur la singularité de structure intervallaire homométrique, structure elle-même capable d'engendrer dans un rapport à la combinatoire des espace opposés ou éthérométriques, le tout décrivant des attracteurs bien étranges.

RÉFÉRENCES

[1] Althuis T.A., Göbel F. *Z-related Pairs in Microtonal Systems*. Memorandum No. 1524, University of Twente, The Netherlands, 2000, disponible à l'adresse http ://doc.utwente.nl/65712/1/1524.pdf.

[2] Bullough R.K. "On Homometric Sets. I. Some General Theorems", *Acta Crystallographica* 14 : 257-268.

[3] Buerger M. J. : "Exploration of cyclotomic point sets for tautoeikonic complementary pairs". *Zeitschrift für Kristallographie* 145 (1977) 371-411.

[4] Callender C. Hall R. "Crystallography and the structure of z-related sets". Paper given at the annual meeting of the Society for Music Theory in Nashville, TN, 2008. Handout accessed from myweb.fsu.edu/ccallender/z-relationhandout.pdf on March. 26, 2013.

[5] Chieh C. "Analysis of cyclotomic sets", *Zeitschrift für Kristallographie* 150 (1979) 261-277.

[6] Forte A. *The Structure of Atonal Music*. Yale University Press, second edition 1977.

[7] Goyette J.S. *The Z-Relation in Theory and Practice*, Ph.D. thesis, University of Rochester, New York, 2012.

[8] Johnson T., Jedrzejewski F. *Looking at Numbers*, Birkhauser, 2013.

[9] Lewin D. "On extended Z-triples". *Theory and Practice* 7 (1981) 38–39.

[10] Lewin D. *Generalized Musical Intervals and Transformations*. Yale University Press, 1987.

[11] Mandereau J. et al. "Z-Relation and Homometry in Musical Distributions", *Journal of Mathematics and Music* 5 (2) (2011) 83-98.

[12] Mandereau J. et al. "Discrete Phase Retrieval in Musical Structures", *Journal of Mathematics and Music* 5 (2) (2011) 99-116.

[13] O'Rourke J., Taslakian, P., Toussaint G., "A pumping lemma for homometric rhythms", *Proceedings of the 20th Canadian Conference on Computational Geometry* (2008) 121–123.

[14] Patterson A.L. "Ambiguities in the X-Ray Analysis of Crystal Structures", *Physical Review* 65 (5-6) (1944) 195-201.

[15] Quinn I. "General Equal-Tempered Harmony (Parts II and III)", *Perspectives of New Music* 45 (1) (2007) 4–63.

[16] Rosenblatt J. "Phase Retrieval", *Communications in Mathematical Physics* 95 (1984) 317-343.

[17] Skiena S., Smith W.D., Lemke P. "Reconstructing Sets Form Interpoint Distances", *Proceeding SCG '90 Proceedings of the sixth annual symposium on Computational geometry* (1990) 332-339.

[18] Soderberg S. "Z-Related Sets as Dual Inversions", *Journal of Music Theory* 39 (1) (1995) 77-100.

[19] Wild J. *Enumerating set-classes and Z-related tuplets in equal temperaments of up to thirty-one notes per octave.* Unpublished graduate seminar paper, McGill University (1996)

ANNEXE A. MULTIPLETS HOMOMÉTRIQUES POUR $\mathbb{Z}_{18}$

(1) un triplet d'ensembles à 5 éléments :
$\{0, 1, 3, 6, 10\}$, $\{0, 1, 3, 10, 15\}$, $\{0, 1, 4, 7, 9\}$

(2) six triplets d'ensembles à 6 éléments :
$\{0, 1, 2, 3, 8, 12\}$, $\{0, 1, 2, 4, 12, 13\}$, $\{0, 1, 2, 6, 8, 9\}$
$\{0, 1, 2, 4, 8, 13\}$, $\{0, 1, 2, 5, 7, 11\}$, $\{0, 1, 2, 5, 12, 14\}$
$\{0, 1, 2, 5, 11, 13\}$, $\{0, 1, 2, 6, 8, 11\}$, $\{0, 1, 3, 5, 12, 13\}$
$\{0, 1, 2, 6, 9, 14\}$, $\{0, 1, 3, 9, 13, 14\}$, $\{0, 1, 4, 6, 13, 14\}$
$\{0, 1, 2, 6, 10, 13\}$, $\{0, 1, 4, 5, 10, 12\}$, $\{0, 1, 4, 6, 10, 11\}$
$\{0, 1, 3, 7, 9, 14\}$, $\{0, 1, 3, 8, 12, 14\}$, $\{0, 1, 5, 7, 9, 12\}\}$
ETC........